

Egzamin z Geometrii I

2 lutego 2024

Proszę o rozwiązanie każdego zadania na osobnej, czytelnie podpisanej kartce. Do każdego zadania proszę zamieścić rysunek oraz szczegółowe uzasadnienia.

✓ 1. Wykaż, że w dziewięciokącie foremnym $ABCDEFGHI$ zachodzi równość $AB + AC = AF$.

2. Punkty A, C', B, D' położone są na jednej prostej w tej właśnie kolejności. Kwadraty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ leżą po tej samej stronie tej prostej. Udowodnij, że odcinki AA', BB', CC', DD' przecinają się w jednym punkcie.

3. Punkt E leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym zachodzą równości

$$CE = DE \quad \text{oraz} \quad \angle AEB = \angle CED = 120^\circ.$$

Udowodnij, że wówczas $AB \leq AD + BC$.

4. Wykaż, że figura ograniczona na płaszczyźnie może mieć najwyżej jeden środek symetrii.

Uwagi: *figurą* nazywamy dowolny niepusty podzbiór płaszczyzny. Figura jest *ograniczona*, jeśli istnieje koło, w którym jest zawarta. *Środkiem symetrii* figury \mathcal{F} nazywamy taki punkt A , dla którego $S_A(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, gdzie S_A oznacza symetrię środkową względem punktu A .

5. Okrąg O jest styczny do okręgu O' opisanego na trójkącie ABC w punkcie S , a do boków AC i BC odpowiednio w punktach D i E . Wykaż, że środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest środkiem odcinka DE .